Ellipsoïde de John-Loewner

Notations/Définitions :
i) $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.
ii) On désigne par $\mathcal{Q}$ (resp. $\mathcal{Q}^+$, resp. $\mathcal{Q}^{++}$) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, resp. définies positives) sur $\mathbb{R}^n$.
iii) Si $q \in \mathcal{Q}^+$, on note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) \leq 1\}$.
iv) Une ellipsoïde est un ensemble de la forme $\mathcal{E}_q$ où q est un élément de $\mathcal{Q}^{++}$.

Théorème : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique ellipsoïde centrée en 0 de volume minimal contenant K.

Lemme : Soit A, B deux matrices symétriques réelles définies positives et α, β deux réels positifs tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta,$$

avec strict inégalité si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$.

Preuve du lemme : On peut pseudo-réduire simultanément A et B dans le sens où il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec les $\lambda_i > 0$ tels que

$$A : P\,{}^tP \text{ et } B = PD\,{}^tP.$$

Ainsi on a $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P)^{2(\alpha+\beta)} (\det\ {}^tP)^{2\alpha+\beta} (\Pi\lambda_i)^\beta = (\det P)^2 (\Pi\lambda_i)^\beta$. On a aussi $\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$. Comme le logarithme est concave on sait que pour tout i, $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i)$. En sommant ces inégalités on trouve

$$\sum \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \sum \beta \ln(\lambda_i),$$

ce qui, en repassant à l'exponentielle, donne

$$\det(\alpha I_n + \beta D) = \prod \alpha + \beta\lambda_i \geq \prod \lambda_i^\beta = (\det D)^\beta.$$

Si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$ nécessairement un des λ_i est différent de 1 donc la stricte concavité du logarithme donne le même résultat avec une inégalité stricte.

Preuve du théorème : Commençons par calculer le volume d'une ellipsoïde $\mathcal{E}_q$ où $q \in \mathcal{Q}^{++}$. On notera V_q ce volume. Comme q est définie positive on sait par le théorème spectral que l'on peut trouver une base orthonormale $(e_1, ...e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle qu'en notant $(x_1, ..., x_n)$ les nouvelles coordonnées on ait $q(x) = \sum a_i x_i^2$ où $x = \sum x_i e_i$. Par définition on a alors

$$V_q = \int ... \int_{a_1 x_1^2 + ... + a_n x_n^2 \leq 1} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n.$$

Opérons alors un changement de variable avec l'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{a_1}}, ..., \dfrac{x_n}{\sqrt{a_n}}\right) \end{array}$$

qui est clairement un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme donc le jacobien est $\dfrac{1}{\sqrt{a_1 ... a_n}}$ (ce qui d'ailleurs montre que ψ est bien localement $\mathcal{C}^1$ partout avec le TIL et la bijectivité donne le caractère difféomorphe). Par ailleurs on sait que dans notre nouvelle base la forme q s'écrit $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ et donc le jacobien vaut $\dfrac{1}{\sqrt{\det(q)}}$. On obtient alors notre nouvelle expression de V_q :

$$V_q = \int ... \int_{x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1} \frac{\mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n}{\sqrt{\det(q)}} = \frac{V_0}{\sqrt{\det(q)}}$$

où V_0 désigne le volume de la boule unité. On remarque que $\det(q)$ est bien définie lorsque l'on diagonalise sur des bases orthonormales, si on prend une base quelconque il peut changer. On peut alors reformuler le problème de la manière suivante :

On cherche $q \in \mathcal{Q}^{++}$ telle que $\det(q)$ soit maximal et $q(x) \leq 1$ pour tout $x \in K$.

Munissons $\mathcal{Q}$ de la norme $N(q) = \sup\limits_{||x|| | \leq 1} q(x)$ (on ne démontre pas ici que c'est une norme mais il faut savoir le faire). On pose $\mathcal{A} = \{q \in \mathcal{Q}^+ : q(x) \leq 1, \forall x \in K\}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un compact convexe non vide de Q.

Convexité : Soit $q, q' \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in]0, 1[$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \geq 0$ donc $\lambda q + (1 - \lambda)q' \in \mathcal{Q}^+$. Pareil pour la deuxième condition.

Fermé : Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$ qui converge dans Q vers q. On a $|q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n)||x||$ qui tend vers 0 par hypothèse donc $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers q. Les conditions pour être dans $\mathcal{A}$ sont des inégalité larges donc la convergence simple permet de montrer que q est dans $\mathcal{A}$.

Bornée : Comme K est d'intérieur non vide on peut se donner $B(a, r)$ une boule ouverte incluse dedans. Si $||x|| \leq r$ alors $a + x \in K$ donc $q(a + x) \leq 1$. De plus $q(-a) = q(a) \leq 1$ ($q(a) = q(-a)$ se voit écrivant q dans la base $(e_1, ..., e_n)$ définie plus haut). En utilisant l'inégalité de Minkwoski (très important, on ne peut pas faire sans) il vient

$$\sqrt{q(x} = \sqrt{q(x + a - a} \leq \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2$$

et donc $|q(x)| \leq 4$. Si $||x|| \leq 1$ on peut alors écrire

$$q(x) = \frac{q(rx)}{r^2} \leq \frac{4}{r^2},$$

ce qui suffit pour montrer que $\mathcal{A}$ est bornée.

Non vide : Comme K est compact en dimension finie il est bornée. Soit donc $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x dans K on ait $||x|| \leq M$. Alors la forme $\overline{q}(x) = \dfrac{||x||^2}{M^2}$ est dans $\mathcal{A}$.

Il est temps de conclure. L'application $\det$ est continue sur le compact $\mathcal{A}$ donc atteint sa borne sup en une forme quadratique notée q_0. Comme $\det(\overline{q}) > 0$ on sait que $\det(q_0) > 0$ ce qui, combiné au fait que q_0 est définie, implique que q_0 est définie positive. Il manque seulement l'unicité maintenant.

Si q_1 est une forme quadratique différente maximisant le déterminant comme $\mathcal{A}$ est convexe, $\dfrac{q_0 + q1}{2} \in \mathcal{A}$. Mais par strict log convexité du déterminant sur les matrices il vient

$$\det\left(\frac{q_0 + q1}{2}\right) > \det(q_0)^{\frac{1}{2}} \det(q_1)^{\frac{1}{2}} = \det(q_0)$$

ce qui est absurde car $\det(q_0)$ est censé être maximal. $\square$

Quelques remarques : Les résultats admis ici et qu'il peut être bon de connaître un peu sont :

- l'inégalité de Minkowski
- la pseudo réduction simultanée utilisée dans le lemme
- le lien entre formes quadratiques définies positives et matrices
- les différents résultats de la preuves qui ne sont pas détaillés (jacobien de ψ, le fait que N soit bien une norme...)